《时间序列分析》

----复习资料

数据科学与大数据技术

编写：小林

日期：2026.06.01

目录

第一章　时间序列分析简介.....1
1.1 引言.....1
1.2 时间序列方法.....1
第二章　时间序列的预处理.....1
2.1 平稳之间序列的定义.....1
平稳时间序列的统计性质（P21）.....1
2.3 平稳时间序列的意义（P23-24）.....1
2.4 平稳序列分析的理论基础.....2
2.5 平稳性检验.....2
2.6 纯随机性检验.....2
第三章　ARMA 模型的性质.....2
3.1 AR 模型.....2
3.2 MA 模型.....3
3.3 ARMA 模型.....3
第四章　平稳序列的拟合与预测.....3
4.1 建模步骤.....3
4.2 模型识别.....3
4.3 参数估计.....4
4.4 模型检验.....4
4.5 模型优化.....4
4.6 序列预测.....4
第五章　无季节效应的非平稳序列分析.....5
5.1 Cramer 分解定理.....5
5.2 差分平稳.....5
5.3 ARIMA 模型.....5
第六章　有季节效应的非平稳序列分析.....5
6.1 因素分解理论.....5
6.2 因素分解模型.....6
6.3 指数平滑预测模型.....6
6.4 ARIMA 加法模型.....6
第七章　条件异方差模型.....6
7.1 异方差的问题.....6
7.3 异方差的直观判断.....6
7.4 ARCH 模型.....7
7.5 GARCH 模型.....7

第一章 时间序列分析简介

1.1 引言

（P1）时间序列分析：按照时间的顺序把随机时间变化发展的过程记录下来就构成了一个时间序列。

1.2 时间序列方法

（P5）时域分析方法步骤（简答）

第一步，考察观察值序列的特征；第二步，根据序列的特征选择适当的拟合模型；第三步，根据序列的观察数据确定模型的口径；第四步，检验模型，优化模型；第五步，利用拟合好的模型来推断序列其他的统计性质或预测序列将来的发展。

第二章 时间序列的预处理

2.1 平稳之间序列的定义

1. 严平稳（P20）

严平稳是一种条件比较苛刻的平稳性定义，它认为只有当序列所有的统计性质都不随时间的推移而发生变化时，该序列才能被认为平稳。

2. 宽平稳（P20）

宽平稳是使用序列的特征统计量来定义的一种平稳性，它认为序列的统计性质主要由它的低阶矩决定，所以只要保证序列低阶（二阶）矩平稳，就能保证序列的主要性质近似稳定。

严格地讲，只有存在二阶矩的严平稳序列才一定是宽平稳序列。

平稳时间序列的统计性质（P21）

1. 常数均值

$$EX_t = \mu, \forall t, s, k \in T$$

2. 自协方差函数和自关系函数只依赖于时间的平移长度而与时间的起止点无关。

一个平稳时间序列一定唯一决定了它的自相关系数，但一个自相关系数未必唯一对应一个平稳时间序列。

2.3 平稳时间序列的意义（P23-24）

1. 延迟 k 自协方差函数的估计值

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{n-k}, \forall 0 < k < n$$

2. 总体方差的估计值

$$\hat{\gamma}(0) = \frac{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2}{n-1}$$

3. 延迟 k 自相关系数的估计值

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)}, \forall 0 < k < n$$

4. 当延迟阶数 k 远小于样本容量 n 时的延迟 k 自相关系数的估计值

$$\hat{\rho}_k \approx \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(x_t-\bar{x})(x_{t+k}-\bar{x})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t-\bar{x})^2}, \forall 0<k<n$$

2.4 平稳序列分析的理论基础

1. Wold 分解定理（P24）（简答）

对于任意一个离散平稳时间序列$\{X_t\}$，它都可以分解为两个不相关的平稳序列之和，其中一个为确定性的，另一个为随机性的。

2. 平稳序列特征根的性质

根据 Wold 分解定理，任意平稳序列$\{X_t\}$都可以等价表达为 p 阶线性差分方程。平稳序列必须满足每个特征根的绝对值都小于 1。

2.5 平稳性检验

DF 检验

单位根检验是构造统计量进行序列平稳性检验的最常用方法，它的理论基础是如果序列是平稳的，那么该序列的所有特征根都应该再单位元内。

2.6 纯随机性检验

纯随机序列的定义：过去的行为对将来的发展没有丝毫影响，这种序列称为纯随机序列。如果时间序列$\{X_t\}$满足如下性质：(1)任取$t \in T$，有$EX_t = \mu$；(2)任取$t,s \in T$有$\gamma(t,s) = \begin{cases}\sigma^2, t=s \\ 0, t \neq s\end{cases}$，称序列$\{X_t\}$为纯随机序列，也称为白噪声序列，简记为$X_t \sim WN(\mu,\sigma^2)$。

纯随机序列的性质：纯随机性、方差齐性。

第三章 ARMA 模型的性质

3.1 AR 模型

中心化变换实际上就是非中心化的序列整个平移一个常数，这种整体移动对序列值之间的相关关系没有任何影响。

【例 3-1】给四个 AR 模型，判断平稳性。

假定$\{\varepsilon_t\}$为标准正态白噪声序列，分别使用特征根判别和平稳域判别。

AR(1)模型为：$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$，特征方程为：$\lambda - \phi_1 = 0$，特征根为：$\lambda = \phi_1$，模型平稳的特征根$|\lambda| < 1$，所以其平稳域为$\{\phi_1 | -1 < \phi_1 < 1\}$

AR(2)模型为：$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$，特征方程为：$\lambda^2 - \lambda\phi_1 - \phi_2 = 0$，特征根为$\lambda_1 = \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$，$\lambda_2 = \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$，AR(2)模型平稳的充要条件是$|\lambda_1| < 1$且$|\lambda_2| < 1$，所以其平稳域为$\{\phi_1,\phi_2 || \phi_2| < -1 \text{ 且} \phi_2 \pm \phi_1 < 1\}$

平稳 AR(p)模型的自相关系数有两个显著的性质：拖尾性、呈指数衰减。

偏自相关系数的截尾性：平稳 AR(p)模型的偏自相关系数具有 p 阶截尾性，所谓 p 阶截尾，是指$\phi_{kk} = 0 (\forall k > p)$，要证明这一点，实际上只要能证明当$k >$

p时，$D_k = 0$即可。

3.2 MA 模型

1. 可逆的定义

若一个 MA 模型能够表示成收敛的 AR 模型形式，那么该 MA 模型称为可逆模型，一个自相关系数唯一对应一个可逆 MA 模型。

2. MA(q)模型的可逆性条件

MA(q)模型的系数多项式的根都在单位圆外$\left(\frac{1}{\lambda_i} > 1\right)$。显然，MA(q)模型的可逆概念和 AR(p)模型的平稳概念是完全对偶的，容易验证，MA(1)模型的可逆条件是$-1 < \theta_1 < 1$，MA(2)模型可逆的条件是$|\theta_2| < -1$且$\theta_2 \pm \theta_1 < 1$。

3.3 ARMA 模型

ARMA(p,q)模型的平稳条件是$\Phi(B) = 0$的根都在单位圆外。ARMA(p,q)模型的平稳性完全由其自回归部分的平稳性决定。

模型	系相关系数	偏自相关系数
AR(p)	拖尾	p 阶拖尾
MA(q)	q 阶拖尾	拖尾
ARMA(p,q)	拖尾	拖尾

第四章 平稳序列的拟合与预测

4.1 建模步骤

（简答）ARMA 模型建模步骤：

1. 求出该观察值序列的样本自选股关系数（ACF）和样本偏自相关系数（PACF）的值；
2. 根据样本自相关系数和偏自相关系数的性质，选择适当的 ARMA(p,q)模型进行拟合；
3. 估计模型中未知参数的值；
4. 检验模型的有效性，如果拟合模型通不过检验，转向步骤 2，重新选择模型再拟合；
5. 模型优化，如果拟合模型通过检验，仍然转向步骤 2，充分考虑各种可能，建立多个拟合模型，从所有通过检验的拟合模型中选择最优模型；
6. 利用拟合模型，预测序列的将来走势。

4.2 模型识别

ARMA 模型定阶的基本原则如下表所示。

$\hat{\rho}_k$	$\hat{\phi}_{kk}$	模型定阶
拖尾	p 阶拖尾	AR(p)模型
q 阶拖尾	拖尾	MA(q)模型
拖尾	拖尾	ARMA(p,q)模型

可以利用 2 倍标准差范围辅助判断。如果样本自相关系数或偏自相关系数在最初的 d 阶明显超过 2 倍标准差范围，而后几乎 95%的自相关系数都落在 2 倍

标准差的范围以内，而且由非零自相关系数衰减为小值波动的过程非常突然，这时，通常视为自相关系数截尾。截尾阶数为 d。

因为 ARMA 模型的阶数通常都不高，所以实务中更常用的方法是从最小阶数 p=1，q=1 开始尝试，不断增加 p 和 q 的阶数，直到模型精度达到研究要求。因为平稳可逆 ARMA 模型整个的自治性，即 AR 模型可以转换为 MA 模型，MA 模型也可以转化为 AR 模型，所以对于 ARMA 模型的阶数识别并没有唯一结果。很可能出现同一个序列，使用不同的阶数识别，都能得到很不错的拟合效果。

4.3 参数估计

对于未知参数的估计方法有三种：矩估计、极大似然估计和最小二乘估计

1. 矩估计（简答）

矩估计方法，尤其是低阶 ARMA 模型场合下的矩估计方法具有计算量小、估计思想简单直观，且不需要假设总体分布的优点。但是在这种方法中只用到了 p+q 个样本自相关系数，即样本二阶矩的信息，观察值序列中的其他信息被忽略了。这导致矩估计方法是一种比较粗糙的估计方法，它的估计精度一般不高，因此常被用于确定极大似然估计和最小二乘估计迭代计算的初始值。

2. 极大似然估计（简答）

极大似然估计充分利用了每一个观察值所提供的信息，因而它的估计精度高，同时具有估计的一致性、渐近正态性和渐近有效性等许多优良的统计性质，是一种非常优良的参数估计方法。但它的缺点是需要实现假定序列的分布。

4.4 模型检验

1. 模型的显著性检验（简答）

模型的显著性检验主要是检验模型的有效性。一个模型是否显著有效主要看它提取的信息是否充分。拟合残差项中将不再蕴含任何相关信息，即残差序列应该为白噪声序列，这样的模型称为显著有效模型。反之，如果残差序列为非白噪声序列，那就意味着残差序列中还残留着相关信息未被提取，这就说明拟合模型不够有效，通常需要选择其他模型重新拟合。

2. 参数的显著性检验（简答）

参数的显著性检验就是要检验每一个未知参数是否显著非零。这个检验的目的是删除不显著参数使模型最精简。如果莫格参数不显著非零，即表示该参数所对应的那个自变量对因变量的影响不明显，该自变量就可以从拟合模型中提出。最终模型将由一系列参数显著非零的自变量表示。

4.5 模型优化

（简答）什么是 AIC 和 SBC 准则：

AIC 准则：该准则的指导思想是一个拟合模型的优劣可以从两方面去思考：一方面是常用来衡量拟合程度的似然函数值；另一方面是模型中未知参数的个数。

SBC 准则 SBC 对 AIC 的改进就是将未知参数个数的惩罚权重由常数 2 变成了样本容量的对数函数 ln$n$。

4.6 序列预测

目前对平稳序列最常用的预测方法是**线性最小方差预测。**

MA(q)序列理论上智能预测 q 步之内的序列走势，超过 q 步预测值恒等于

序列均值，这是 MA(q)序列自相关 q 步截尾的性质决定的。

第五章 无季节效应的非平稳序列分析

5.1 Cramer 分解定理

（简答）Cramer 分解定理：任何一个时间序列$\{x_t\}$都可以视为两部分的叠加，其中，一部分是由时间 t 的多项式决定的确定性成分，另一部分是由白噪声序列决定的随机性成分。该定理说明任何一个序列的波动都可以视为同时受到确定性影响的随机性影响的作用。

5.2 差分平稳

常见的差分方式：序列蕴含显著的线性趋势，1 阶差分就可以实现趋势平稳；序列蕴含曲线趋势，通常低阶（2 阶或 3 阶）差分就可以提取出曲线趋势的影响；蕴含固定周期的序列进行步长为周期长度的差分运算。

5.3 ARIMA 模型

1. ARIMA 模型建模步骤（P136）：

获取观察值序列后，对该序列进行平稳性检验，若不平稳则通过一系列运算（如差分法、标准化、累加、累减、函数型变形、平滑法等）转化为平稳序列后重新进平稳性检验，平稳则继续进行白噪声检验，若白噪声检验不通过则调整 ARMA 模型进行重新拟合，然后将拟合后序列再进行白噪声检验，直至检验通过。

2. 消除滞后算子 B（P138）：

记住$\nabla = (1-B), B^k x_t = x_{t-k}$，将式子中的 B 进行替换后计算消除。

第六章 有季节效应的非平稳序列分析

6.1 因素分解理论

（简答）四个影响序列波动的因素：

1. 长期趋势：序列呈现明显的长期递增或递减的变化规律；
2. 循环波动：序列呈现出从低到高，再从高到低的反复循环波动；
3. 季节性变化：序列呈现出和季节变化相关的稳定周期性波动，后来季节性变化的周期扩展到任意稳定周期；
4. 随机波动：除了长期趋势、循环波动和季节性变化之外，其他不能用确定性因素解释的序列波动都属于随机波动。

最常用的两个拟合函数是加法函数和乘法函数，相应的因素分解模型称为加法模型和乘法模型。

如果观察时期不够长，那么循环因素和趋势因素的影响很难准确区分。

有些社会现象和经济现象显示某些特殊日期是很显著的影响因素，但是再传统因素分解模型中却没有被纳入研究。

（简答）基于因素分解的思想进行确定性时序分析的目的：

一是克服其他因素的干扰，单纯测度出某个确定性因素（诸如季节、趋势、交易日）对序列的影响；二是根据序列呈现的确定性特征选择适当的方法对序列进行综合预测。

6.2 因素分解模型

移动平均函数的三个约束条件：**时期对称、系数相等、系数和为 1。**

（简答）简单中心移动平均方法的良好属性：

1.简单中心移动平均能够有效提取低阶趋势（一元一次线性趋势或一元二次抛物线趋势）；2.简单中心移动平均能够实现拟合方差最小；3.简单中心移动平均能够有效消除季节效应；因为简单中心移动平均具有这些良好的属性，所以，只要选择适当的平均期数就能有效消除季节效应和随机波动的影响，有效提取序列的趋势信息。

凡是呈现出固定的周期性变化的时间，都称它具有季节效应。

（简答）加法（乘法）模型的季节指数构造步骤：

第一步，从原序列中消除趋势效应；第二步，计算$\{y\}$序列总均值；第三步，计算每季度均值$\bar{y}_j$；第四步，计算加法（乘法）模型的季节指数S_j。

X11 模型中的移动平均方法：**简单移动平均方法、Henderson 加权移动平均、Musgrave 非对称移动平均**。

6.3 指数平滑预测模型

确定性因素分解的第二个目的是根据序列呈现的确定性特征，选择适当的模型，预测序列未来的发展。根据序列是否具有长期趋势与季节效应，可以把序列分为如下三大类：第一类，即无长期趋势，也无季节效应；第二类，有长期趋势，无季节效应；第三类，长期趋势可有可无，但一定有季节效应。

预测模型选择	长期趋势	季节效应
简单指数平滑	无	无
Holt 两参数指数平滑	有	无
Holt-Winters 三参数指数平滑	有 无	有

6.4 ARIMA 加法模型

季节加法模型实际上就是通过趋势差分、季节差分将序列转化为平稳序列，再对其进行拟合。

第七章 条件异方差模型

7.1 异方差的问题

（填空）白噪声序列应该满足的三个假定条件：**零均值、纯随机、方差齐性**。

（判断）如果残差序列方差齐性的假定不成立，即随着时间的变化，残差序列的方差不是常数，我们称这种属性为方差非齐，或简称为异方差现象。序列的异方差属性可以表达为方差为时间 t 的函数。

7.3 异方差的直观判断

（判断）当残差序列$\{\varepsilon_t\}$方差齐性时，它应该在一个边界和均值的距离几乎相等的空间里随机波动，不带任何趋势，否则，就显示出异方差的性质。（见 P202 的四个图）

（填空）当残差序列异方差时的两种处理思路：假如已知异方差函数的具体形式，进行方差齐性变换；假如不知道异方差的具体形式，拟合条件异方差模型。

对于标准差与水平成正比关系的异方差序列，对数变换可以有效地实现方差齐性。

用对数变换实现方差齐性的，只能是方差与均值之间具有线性关系，其他情况下，对数变换不一定能实现方差齐性。

7.4 ARCH 模型

（简答）集群效应：

集群效应是指在消除去确定性非平稳因素的影响后，残差序列在大部分时段小幅波动，但是会在某些时段出现持续大幅波动。集群效应的存在意味着在序列持续大幅波动的时期，基于期望方差估计的序列波动范围会显著小于真实波动范围。

7.5 GARCH 模型

ARCH 模型的实质是使用残差平方序列的 q 阶移动平均拟合当期异方差函数值。

ARCH 模型实际上就是$\{h_t\}$关于$\{{\varepsilon_t}^2, {\varepsilon_{t-1}}^2, {\varepsilon_{t-2}}^2, \cdots, {\varepsilon_{t-q}}^2\}$的 q 阶移动平均的 MA(q)模型；而 GARCH 模型实际上就是$\{h_t\}$关于$\{h_{t-1}, h_{t-2}, \cdots, h_{t-p}\}$的 p 阶自相关，关于$\{{\varepsilon_t}^2, {\varepsilon_{t-1}}^2, {\varepsilon_{t-2}}^2, \cdots, {\varepsilon_{t-q}}^2\}$的 q 阶移动平均的 ARMA(p,q)模型。

（填空）一个完整的条件异方差模型的三个构成部分：**均值模型、条件异方差模型和分布假定**。

（简答）拟合 GARCH 模型的步骤：

第一步，构建水平模型$x_t = f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots) + \varepsilon_t$，提取序列均值中蕴含的相关信息；第二步，检验残差序列是否具有条件异方差特征；第三步，对具有条件异方差特征的序列拟合 GARCH 模型；第四步，检验拟合模型的优劣，优化模型；第五步，使用拟合模型进行预测。

（简答）Portmanteau Q 检验和 LM 检验的构造思想：

Portmanteau Q 检验：如果残差序列方差非齐，且具有集群效应，那么残差平方序列通常具有自相关性，所以方差非齐检验可以转化为残差平方序列的自相关性检验；

LM 检验：如果残差序列方差非齐，且具有集群效应，那么残差平方序列通常具有自相关性，该检验方法实际上就是残差平方序列$\{{\varepsilon_t}^2\}$自回归方程的显著性检验。

（简答）图检验方法怎么使用：

QQ 图，实际上是分布的分位点图。横轴是标准正态分布的分位点，纵轴是进行标准化变换后的残差序列的样本分位点。如果残差序列确实服从正态分布，那么残差序列的次序观察值对应的横轴坐标应该恰好等于纵轴坐标，即所有的观察值点应该在对角线上。如果观察值偏离对小件，就是偏离了正态分布假定，偏离对角线的点越多，偏离的角度越大，正态分布假定就越不可靠。

残差直方图是另一种分布检验方法。将残差序列绘制成直方图，然后根据残

差序列的样本均值和样本差，绘制正态分布参考线。如果直方图和正态分布参考线很吻合，说明正态分布假定比较合理。如果直方图和正态分布参考线偏离严重，说明正态分布假定不合理。